

Descubrimiento de relaciones de paralelismo y perpendicularidad en el entorno. *GeoGebra* como medio para el reconocimiento de conceptos y propiedades

Dulce Gottig⁽¹⁾, Ana María Mántica⁽²⁾, Magali Freyre⁽³⁾

^{1,2,3} Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral. Argentina.
¹dulcegottig17@gmail.com, ²ana.mantica@gmail.com, ³magalifreyre@gmail.com

Resumen

Las tecnologías en el aula modifican el modo de trabajo que atraviesan las formas de producción del conocimiento y por tanto las prácticas de enseñanza. Particularmente la incorporación genuina del Software de Geometría Dinámica (SGD) en el aula de matemática permite al estudiante involucrarse en el reconocimiento de relaciones entre distintas formas de representación del mismo concepto.

La propuesta tiene por objetivo que los estudiantes del profesorado en matemática identifiquen en construcciones del entorno relaciones de paralelismo y perpendicularidad y que las construyan empleando *GeoGebra*. Consideramos que el modelado de situaciones geométricas, en este caso fotografías del entorno, a partir de gráficas dinámicas, plantea un camino potente para el aprendizaje de conceptos matemáticos.

Los estudiantes explicitarán los conceptos que visualizan en las fotografías, representarán dichas situaciones utilizando *GeoGebra*, y luego examinando la construcción realizada con el protocolo de construcción, analizarán conceptos y/o relaciones que pusieron en juego.

Palabras clave: educación matemática; futuros profesores; geometría 3d; *GeoGebra*; imágenes del entorno.

Introducción

La presente propuesta se enmarca en una Beca de Iniciación a la Investigación que otorga la Universidad Nacional del Litoral de Santa Fe, Argentina. Tiene por objetivo que estudiantes avanzados del Profesorado en Matemática identifiquen relaciones de paralelismo y perpendicularidad en imágenes del entorno y sus construcciones con SGD. Para esto nos proponemos diseñar e implementar tareas que apunten al reconocimiento de propiedades geométricas en elementos del entorno físico a partir del empleo de *GeoGebra* en construcciones de objetos que se presentan en fotografías. Con ello se pretende conjeturar propiedades implícitas y explicitarlas. Las imágenes que se seleccionan son fotografías tomadas por las investigadoras que corresponden a lugares cotidianos que hacen al entorno del recorrido que los estudiantes realizan eventualmente. Es importante que los objetos construidos con SGD sean manipulados por los estudiantes de manera que puedan identificar propiedades y clarificar los pasos intermedios por los cuales esas propiedades pueden ser inferidas de aquellas usadas en la construcción (Healy, 2000).

El interés por realizar esta propuesta se debe a la necesidad de trabajar en la innovación de proyectos que estimulen el pensamiento crítico, favorezcan el razonamiento y la visualización, e incentiven a la indagación. Consideramos relevante investigar temas propios de la geometría tridimensional con el fin de ahondar en sus particularidades y explorar tanto propiedades como la razón de ser de las mismas no solo con fundamentación teórica sino también mediante la utilización del software.

Nos interesa particularmente analizar el uso del protocolo de construcción del SGD e identificar las potencialidades y limitaciones que se detectan en la formulación y validación de propiedades de paralelismo y perpendicularidad con el empleo de *GeoGebra* al realizar una construcción.

Somos conscientes del lugar que asumen las tecnologías en el aula y cómo esto modifica el modo de trabajo que atraviesan las formas de producción del conocimiento y por tanto su inclusión en las prácticas de enseñanza encontrando un sentido pedagógico y didáctico potente. Esto atraviesa las maneras de conocer y aprender y genera en los docentes el compromiso de producir “propuestas didácticas que alienten a sus alumnos a aprender de modos enriquecidos y valiosos” (Maggio, 2012, p.14).

Contexto y metodología de la experiencia

En esta propuesta se estudiarán particularmente las relaciones de paralelismo y perpendicularidad. Se consideran estas relaciones por las particularidades que presentan cuando se abordan en 3D. Götte y Mántica (2021) afirman que:

En la geometría euclídea plana los conceptos de paralelismo y de perpendicularidad se definen entre rectas, en cambio en la espacial se definen entre rectas, entre planos y rectas y entre planos, es decir, se amplía la variedad de posibles relaciones. En el plano las rectas perpendiculares son siempre secantes en cambio en el espacio pueden ser secantes o alabeadas. Por otra parte, en el plano por un punto pasa una única perpendicular a una recta, pero en el espacio por un punto pasan infinitas rectas perpendiculares a una dada. En el plano dos rectas perpendiculares a otra son paralelas o coincidentes y en el espacio tridimensional además de paralelas o coincidentes pueden ser también secantes o alabeadas. En 2D si una recta corta a otra corta a todas sus paralelas, esto no es así en 3D. Lo que se mantiene en ambas es que por un punto exterior a una recta pasa una única paralela a ella, cuestión distintiva de la geometría euclídea (pp.38-39).

Otras particularidades consideradas por Götte y Mántica (2021) tienen que ver con propiedades en las que los elementos que intervienen exceden las dos dimensiones como

rectas incluidas en planos perpendiculares son paralelas, oblicuas o perpendiculares; por un punto exterior a un plano pasan infinitas rectas paralelas a él; si un plano corta a otro, corta a todos sus paralelos; si un plano corta a una recta, corta a todas sus paralelas y, existe una única recta perpendicular a un plano por un punto (p.39).

Esta investigación cualitativa se enmarca en el paradigma de diseño pues apunta al estudio de interacciones educativas provocadas por un conjunto diseñado de tareas curriculares donde el diseño, desarrollo y evaluación de las intervenciones se producen con el objetivo de favorecer la comprensión de los procesos de enseñanza y de aprendizaje en contexto (Godino et al., 2013; Plomp, 2013). El proceso de investigación tiene lugar a través de ciclos continuos de puesta en práctica, análisis y rediseño. Se espera que los conceptos puestos en juego en la identificación de propiedades en imágenes y construcciones se vean fortalecidos por la mediación de tecnologías digitales. La información de lo realizado por los estudiantes se obtendrá a través de un cuestionario (McKnight, 2000) y dispositivos de grabación audiovisual.

Consideramos dos fotografías tomadas del entorno de los estudiantes. En un primer momento, se les solicita que describan qué conceptos geométricos son posibles apreciar en las mismas y se les pide que envíen por mail, antes de la clase presencial propuesta, las

propiedades y relaciones que logran visualizar. En una segunda instancia, en clase, se les propone construir en *GeoGebra* un modelo de los objetos de cada imagen y explicitar nuevas propiedades que les fueron posibles de conjeturar mediante la representación gráfica. Además, se les solicita armar un documento para detallar tales relaciones.

En última instancia, se les propone realizar una revisión de las construcciones elaboradas haciendo uso del protocolo de construcción que proporciona *GeoGebra* con el fin de exponer definiciones y propiedades puestas en juego.

La propuesta se realizará con estudiantes de tercer año del Profesorado en Matemática que estén cursando la asignatura Taller de Geometría. Para cursar esta asignatura los estudiantes deben contar con el cursado previo de Geometría Euclídea Plana y Geometría Euclídea Espacial, considerando al taller como un espacio de síntesis de ambas geometrías.

Exponemos a continuación las fotografías que se presentarán a los estudiantes



Figura 1. Fotografías presentadas a los estudiantes. a: Puerta giratoria de un hotel de la ciudad.
b: Cerca de alambre de un terreno.

Referentes considerados

Numerosos investigadores estudian la relación de las tecnologías en la construcción de conceptos y relaciones matemáticas, en particular el uso de SGD.

En este sentido Sessa et al. (2015) manifiestan que las intenciones didácticas se modifican al verse enriquecidas por el uso del software y sostienen que las figuras dinámicas construidas en SGD representan modelos recortados de los problemas en estudio. El trabajo del docente debe dejar en claro a los estudiantes que la construcción en el SGD no es suficiente para realizar determinadas afirmaciones, sino que éstas deben estar apuntaladas

por cierta racionalidad matemática. Es intención que los alumnos vayan “construyendo una mirada crítica sobre las respuestas del software, relacionándolas con los conocimientos que tienen sobre los objetos matemáticos que se ponen juego”. (p.159)

Por otra parte, Shahmohammadi (2019) considera que una de las mayores fortalezas potenciales del software dinámico es que permite involucrarse en el reconocimiento de relaciones de similitud y distintas formas de representación del mismo concepto, cuestión que favorece la comprensión más profunda de los objetos matemáticos involucrados. Sostiene que no se debe subestimar el papel crucial que juegan las actividades bien diseñadas, así como los roles de los docentes para dirigir adecuadamente a los estudiantes en el uso del software. Los docentes juegan un papel importante en el establecimiento del contrato didáctico y son la principal fuente de retroalimentación para los estudiantes, para estimular su reflexión sobre el trabajo al plantear los temas claves, hacer sugerencias e impulsar el debate de toda la clase.

Respecto al modelado de situaciones geométricas a partir de gráficas dinámicas, Arcavi (2008) plantea que es un camino potente para el aprendizaje de conceptos matemáticos. Con el uso de un SGD, la representación gráfica prima a la algebraica y le da sentido, favoreciendo la comprensión. Asimismo, remarca el reto de crear situaciones en las cuales el resultado de la actividad es inesperado o contra intuitivo, de tal forma que entre lo conjeturado y lo devuelto por el software se propicie la necesidad de demostrar o probar conjeturas utilizando argumentos matemáticos. La sorpresa entre lo conjeturado y lo devuelto por el ambiente dinámico crea una retroalimentación que es proporcionada por el ambiente mismo, el cual reacciona a medida que es requerido.

Algunas reflexiones

En línea con lo expuesto anteriormente, se espera que al realizar construcciones empleando propiedades y al revisar lo elaborado haciendo uso del protocolo de construcción que proporciona *GeoGebra*, se pongan de manifiesto definiciones y propiedades puestas en juego.

Por ejemplo, en la Figura 1 a, si consideramos que las hojas de las puertas giratorias son planos secantes y se intersecan en una recta r y P es el punto de intersección de esta con el plano del piso, podríamos decir que en cada uno de los planos existe una recta

perpendicular a r por P . Por lo tanto, se podría enunciar que por un punto pasan infinitas perpendiculares a una recta y que están todas en un plano.

En la Figura 1 b, se puede encontrar la recta perpendicular a dos rectas alabeadas y la misma permite comprender la demostración del teorema “Dadas dos rectas cruzadas, existe una y solo una perpendicular a ambas. El segmento determinado por los puntos de intersección es menor que cualquier otro que une dos puntos respectivamente situados en una y otra recta” (Mántica y Götte, 2022, p.65), además de determinar la existencia de rectas alabeadas no ortogonales, cuestión muy presente en los alumnos por el tipo de construcciones del entorno.

Los conceptos mencionados son solo algunos que pueden derivarse de las imágenes seleccionadas. Se espera que los estudiantes identifiquen diversos contenidos y relacionen construcciones con *GeoGebra*, propiedades y definiciones correspondientes. Esto contribuye a que los conceptos se doten de sentido a partir de la representación gráfica, de la selección de herramientas de construcción y la reflexión acerca de las propiedades geométricas involucradas.

Referencias bibliográficas

- Arcavi, A. (2008). Modelling with graphical representations. *For the Learning of Mathematics*, 28, 2-10. <https://www.jstor.org/stable/40248601>
- Godino, J. D., Batanero, C., Contreras, A., Estepa, A., Lacasta, E. y Wilhelmi, M. (2013). *La ingeniería didáctica como investigación basada en el diseño. Versión ampliada en español de la comunicación presentada en el CERME*, 8.
- Götte, M. y Mántica, A. (2021). Categorización de errores en Geometría 3D en estudiantes de nivel superior. *Épsilon. Revista de Educación Matemática*. 108:27-44. <https://thales.cica.es/epsilon/?q=node/4920>
- Maggio, M. (2012). Enriquecer la enseñanza. Los ambientes con alta disposición tecnológica como oportunidad. Paidós.
- Mántica, A. y Götte, M. (2022) *Geometría en 3D*. Ediciones UNL. En <https://hdl.handle.net/11185/6378>
- Mariotti, A. (2006). Proof and proving in mathematics. En A. Gutierrez y P. Boero (eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past,*

Present and Future (173-204).

Molina, M.; Castro, E., Molina, J.: Castro. E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias*, 29(1), 075–088. <https://ensciencias.uab.cat/article/view/v29-n1-molina-castro-molina-et al/435-pdf-es>

Molina, O.; Luque, C. y Robayo A. (2014). Producción de teoremas con estudiantes en extraedad: la justificación de una conjetura. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*. 35: 39-61. <https://doi.org/10.17227/01213814.35ted38.62>

Plomp, T. (2013). *Educational Design Research: An Introduction*. En Plomp, T. y Nieveen, N. (Eds.). *Educational Design Research*. Part A: An introduction. (pp. 10-51). Enschede, the Netherlands: Netherlands Institute for Curriculum Development (SLO).

Sessa, C., Borsani, V., Cedrón, M., Cicala, R. Di Rico, E. y Duarte, B. (2015) La actividad docente mediada con TIC. La transformación del trabajo matemático en el aula del secundario a partir de la integración de las computadoras. En A. Pereyra y D. Fridman (Ed.) *Prácticas pedagógicas y políticas educativas. Investigaciones en el territorio bonaerense*. (pp. 137-164) Buenos Aires, Argentina: UNIPE: Editorial Universitaria.

https://www.researchgate.net/publication/276027671_La_transformacion_del_trabajo_matematico_en_el_aula_del_secundario_a_partir_de_la_integracion_de_las_computadoras

Shahmohammadi, S. B. (2019). *Opportunities and Challenges in Using Dynamic Software in Mathematics Education*.12:1834-1840. <https://infonomics-society.org/iji/published-papers/volume-12-2019/>